### Лабораторная работа №9 «Задача о замене оборудования»

**Цели работы: н**аучиться решать задачи динамического программирования, научиться разбивать весь процесс решения задачи на этапы, научиться выбирать оптимальную стратегию поведения.

### Краткая теория

1. **Понятие задачи динамического программирования**

Рассматриваемые ранее задачи характеризуются тем, что в них не учитываются изменения оптимизируемых параметров во времени – процессы считаются статичными. Выбирается некоторый период времени, и для него определяются проектируемые или планируемые значения показателей. При этом предполагается, что управляемые или неуправляемые параметры системы в течение всего планового времени не будут изменяться или, по крайней мере, не претерпят серьёзных изменений, требующих пересмотра принятых решений.

Однако в реальной жизни есть задачи, в которых необходимо учитывать изменения параметров систем во времени. Эти параметры могут меняться непрерывно или дискретно – от этапа к этапу. Например, из года в год меняется возраст машин и оборудования, изменяется производственная мощность и производительность труда на предприятиях. Очевидно, что необходимо принимать оптимальные решения на год (или другой срок) и одновременно на весь рассматриваемый период в целом с учётом возможных изменений параметров. Для решения такого вида задач, которые получили название **многошаговые**, разработан соответствующий математический аппарат, который получил название **динамическое программирование**.

Задача может быть сформулирована следующим образом:

Задача динамического программирования – определить ui\* (ui\* не только число, а может быть вектором, функцией) на каждом шаге, i = 1, 2 …, m, и тем самым u\* всей операции в целом.

Рассмотрим подход к решению данной задачи. Характерным для динамического программирования является то, что переменные рассматриваются вместе, а не последовательно – одна за другой. При этом вычислительная тема строится таким образом, что вместо одной задачи с n переменными решается серия задач с небольшим числом, а чаще с одной переменной. Сам же вычислительный процесс производится на основе метода последовательных приближений в два круга:

1. *От последнего шага к первому.*
2. *От первого шага к последнему или же наоборот, в зависимости от исходных данных.*

На первом круге ищется так называемое условное оптимальное решение. Оно выбирается так, чтобы все предыдущие шаги обеспечили максимальную эффективность последующего. Основу такого подхода составляет принцип оптимальности Беллмана, который формулируется следующим образом:

*Нельзя получить оптимальное значение целевой функции i-шагового процесса*, *если для любого ui*, *выбранного на шаге i*, *значение целевой функции для оставшихся i-1 шагов не является оптимальным при этом выбранном на i-шаге значении ui*.

Такой процесс продолжается до тех пор, пока решение не потеряет свой условный характер, т. е. до первого шага или последнего. Для него решение просто оптимально. Поэтому второй круг начинают именно с этого шага и последовательно переходят от условных к оптимальным решениям, тем самым обеспечивается оптимальность операции в целом.

### Оптимальное распределение ресурсов Пример:

Капитал 40 млн.руб. инвестор должен вложить в четыре инвестиционных проекта так, чтобы получить максимальный доход. Доходность проектов дана в таблице (вложения кратны 8 млн. руб.)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **u** | **Прибыль от внедрения** | | | |
| **f4(u)** | **f3(u)** | **f2(u)** | **f1(u)** |
| 8 | **55** | **39** | 35 | 32 |
| 16 | 58 | 53 | 76 | 68 |
| 24 | 90 | 80 | **120** | 115 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 32 | 100 | 120 | 135 | 134 |
| 40 | 140 | 145 | 158 | 147 |

### Решение:

Это задача динамического программирования. Решение состоит из двух этапов. На первом этапе (от конца к началу) ищем условное оптимальное решение, на втором (от начала к концу) – ищем оптимальное решение задачи.

### 1 этап.

Распределяем капитал между четырьмя проектами и считаем получаемую прибыль

*L(i), i=*8,16,24,32,40.

**1 шаг**: Денежные средства вкладываются в четвертый проект. L(8)=**55**

L(16)=58 L(24)=90 L(32)=100 L(40)=140

**2 шаг**: Денежные средства вкладываются в четвертый и третий проекты.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **u** | **Прибыль от внедрения** | |
| **1 шаг** | **f3(u)** |
| 8 | **55** | **39** |
| 16 | 58 | 53 |
| 24 | 90 | 80 |
| 32 | 100 | 120 |
| 40 | 140 | 145 |

*L*(8)  max 55;39  55

 

80 08

*L*(16)  max 58 ;55  39; 53   max58;94;53 94



160

*L*(24)  max 90 ;58  39;55  53; 80

88



016 

 max90;97;108;80 108

240

*L*(32)  max 100;90  39;58  53;55  80;120

168

816 024

 max 100;129;111;135;120

 135

  

320

*L*(40)  max 140;100  39;90  53;58  80;55 120;145

248

1616

824

032

  

400

328

2416

1624

832

040

**3 шаг**: Денежные средства вкладываются в четвертый, третий (2 шаг) и второй проекты.

 max 140;139;143;138;175;145

 175

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **u** | **Прибыль от внедрения** | |
| **2 шаг** | **f2(u)** |
| 8 | 55 | 35 |
| 16 | **94** | 76 |
| 24 | 108 | **120** |
| 32 | 135 | 135 |
| 40 | 175 | 158 |

*L*(8)  max 55;35  55



 

80 08

*L*(16)  max 94 ;55  35; 76

 max94;90;76

 94

160

*L*(24)  max 108;94  35;55  76;120

88

016

  

240

 max 108;129;131;120

 131

*L*(32)  max 135;108  35;94  76;55 120;135

168

816

024

  

320

248

1616

824

032

*L*(40)  max 175;135  35;108  76;94 120;55 135;158  max175;170;184; 214;190;158 214

 max 135;143;170;175;135

 175



400

328

2416

1624

832



040

**4 шаг**: Денежные средства вкладываются в четвертый, третий, второй (3 шаг) и первый проекты.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **u** | **Прибыль от внедрения** | |
| **3 шаг** | **f1(u)** |
| 8 | 55 | 32 |
| 16 | 94 | 68 |
| 24 | 131 | 115 |
| 32 | 175 | 134 |
| 40 | **214** | 147 |

*L*(8)  max 55;32  55



 

80 08

*L*(16)  max 94 ;55  32; 68

 max94;87;68

 94

160

*L*(24)  max 131;94  32;55  68;115

88

016

  

240

 max 131;126;123;115

 131

*L*(32)  max 175;131  32;94  68;55 115;134

168

816

024

  

320

248

1616

824

032

*L*(40)  max214;175  32;131  68;94 115;55 134;147   max214;207;199;209;189;147 214





 max 175;163;162;170;134

 175

 400

328

2416

1624

832

040 

### 2 этап:

На четвертом шаге выбираем максимальное из полученных значений прибыли L(40)=214.

И возвращаясь в обратном порядке от таблицы к таблице (от 4 шага к 1) выбираем такие значения доходов, при которых и получено значение 214.

Максимальный доход 214 млн. руб. от вложенных средств может быть получен при следующем распределении средств:

1 проект – 0 млн. руб.

2 проект – 24 млн. руб.

3 проект – 8 млн. руб.

4 проект – 8 млн. руб.

### Задание

**Задание 1.** Распределите оптимальным образом денежные средства инвестора величиной *5 у.е.* между четырьмя предприятиями. Доход каждого предприятия от вложения в него *и* у.е.определяется функцией дохода f(u). Эти функции приведены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| u | | Прибыль от внедрения по предприятиям | | | | | |
| f4(u) | | f3(u) | | f2(u) | f1(u) |
| 1 | | f4(1) | | 6 | | 3 | 4 |
| 2 | | 10 | | f3(2) | | 4 | 6 |
| 3 | | 11 | | 11 | | f2(3) | 8 |
| 4 | | 12 | | 13 | | 11 | f1(4) |
| 5 | | 18 | | 15 | | 18 | 16 |
| **Вариант** | | **1** | |
| f4(1) | | 9 | |
| f3(2) | | 10 | |
| f2(3) | | 7 | |
| f1(4) | | 10 | |

**Задание 2.** Из пункта А в пункт В необходимо проложить автомобильную трассу по самому экономичному пути.

**Вариант 1**

